Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
PD Dr. Michael Flohr
Abgabe 26.11.2013 vor der Vorlesung

ERHALTUNGSGRÖSSEN UND EFFEKTIVES POTENTIAL

Erhaltungsgrößen sind bei der Analyse physikalischer Systeme extrem hilfreich. Je mehr Erhaltungsgrößen es gibt, desto mehr sind die möglichen Bahnen festgelegt.

[H15] *Bahnen in Zentralkräften* **[2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 8 Punkte]**

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie im Keplerproblem die Erhaltungssätze genutzt werden können, um die möglichen Bahnformen zu klassifizieren. Hier wollen wir den umgekehrten Weg gehen und von einer gegebenen Bahn auf die Zentralkraft schließen, in der sich das Teilchen bewegt. Ähnlich wie beim Keplerproblem, sei die Bahnkurve als eine Funktion $r(\varphi)$ gegeben. Das zweite Newtonsche Gesetz nimmt für eine Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$ die Form $f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$ an. Wir setzen $u = 1/r$.

(a) Drücken Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$ und $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}$ durch Ableitungen von r nach der Zeit aus. Verwenden Sie dabei $r^2\dot{\varphi} = L/m = \mathrm{const}$, also Drehimpulserhaltung. Wenn Sie richtig gerechnet haben, können Sie den Betrag der Zentralkraft nun in der Form
$$f(r) = -\frac{L^2}{m}u^2\Big(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u\Big)$$
schreiben.

(b) Zur Überprüfung dieses Resultates überlegen Sie, warum zulässige Bahnen im Keplerproblem die Gleichung $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \mathrm{const} > 0$ erfüllen müssen. Prüfen Sie nach, dass $u = \frac{1}{k}(1 + \varepsilon\cos\varphi)$ eine Lösung ist.

Nun kommen wir zur eigentlichen Problemstellung. Angenommen, die Zentralkraft erlaubt eine kreisförmige Bahn, die durch das Kraftzentrum führt.

(c) Zeigen Sie, dass eine kreisförmige Bahn mit Durchmesser D, die durch den Ursprung führt, in den Variablen u und φ durch $u(\varphi) = \frac{1}{D}\sec\varphi$ gegeben ist. Wenn Sie die Secans-Funktion nicht kennen, schlagen Sie sie nach. Erstellen Sie dazu eine Skizze.

(d) Differenzieren Sie die in (c) diskutierte Bahn $u(\varphi)$ zweimal nach φ und jonglieren ein wenig mit trigonometrischen Identitäten, um zu dem Ergebnis $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} = 2D^2u^3 - u$ zu gelangen.

(e) Bestimmen Sie damit die zugehörige Zentralkraft $f(r)$. Sie sollten eine Abhängigkeit $\sim r^{-5}$ finden.

[H16] *Dreidimensionaler harmonischer Oszillator* **[1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 Punkte]**

Der dreidimensionale harmonische Oszillator ist gegeben durch das Potential
$$V(r) = \frac{1}{2}\omega^2r^2 = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)\,,$$
wobei wir $m = 1$ gesetzt haben.

(a) Wie lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen?

(b) Damit wir diese Gleichungen möglichst nicht lösen müssen, schauen wir die Erhaltungssätze an. Erstaunlicherweise gibt es insgesamt neun Stück:
$$\ell_i = \epsilon_{ijk}x_j\dot{x}_k \qquad \text{und} \qquad q_{ij} = \dot{x}_i\dot{x}_j + \omega^2x_ix_j \qquad \text{für} \qquad i,j,k = 1,2,3\,. \tag{1}$$
Berechnen Sie $e := \frac{1}{2}q_{ii}$. Was ist die physikalische Bedeutung der Größen ℓ_i und e?

(c) Überprüfen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichungen, dass $\dot{\ell}_i = 0$ und $\dot{q}_{ij} = 0$ ist.

(d) Drücken Sie $q_{ij}\ell_j$ und $\ell^2 = \ell_i\ell_i$ durch $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ aus.

(e) Zeigen Sie mit (d), dass $Q(\vec{r}) := x_i(2e\,\delta_{ij} - q_{ij})x_j = \ell^2 = $ konstant ist.

(f) Da eine Zentralkraft vorliegt, bleibt die Bahnkurve in einer Ebene. Wir wählen die Koordinaten so, dass $x_3(t) = 0$ ist. Welche der Größen in (1) sind dann noch ungleich Null?

(g) Schreiben Sie die Gleichung $Q(x_1, x_2, x_3 = 0) = \ell^2$ explizit aus. Was für eine Bahn beschreibt diese Gleichung? *Hinweis*: Durch geeignete Wahl der Koordinatenachsen x_1 und x_2 kann man immer $q_{12} = 0$ erreichen.

Hinweis: Diese Aufgabe ist ein gutes Beispiel für ein physikalisches Problem, bei dem die Index-Notation wirklich enorm viel Schreibarbeit erspart.

HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!
ANKÜNDIGUNG: ***Halbzeitgespräch – Ihre Rückmeldung an uns!*** **Mit Dekan, Studiendekanin und Studiengangskoordinatoren am Montag, 25.11.2013, 18:00 Uhr, Kleiner Physikhörsaal F342**